

doi: 10.5862/MCE.56.5

Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения

*Д-р физ.-мат. наук, профессор М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

Аннотация. В системе компьютерной математики Maple методом индукции получено аналитическое выражение для прогиба фермы с введенным дополнительным поясом жесткости.

Выбрана плоская балочная модель фермы, равномерно нагруженная вертикальными нагрузками по нижнему поясу. Жесткости стержней приняты одинаковыми. Элементы упрочнения представляют собой горизонтальные стержни и стойки, образующие дополнительный пояс снизу фермы. Усилия в стержнях определяются в аналитической форме методом вырезания узлов. Статическая неопределенность, которая создается за счет введения элементов упрочнения, раскрывается методом сил. Коэффициенты канонического уравнения и прогиб середины пролета в нижнем поясе находятся по формуле Максвелла – Мора.

Построены графики зависимости прогиба от размеров фермы и числа панелей. Найдены асимптотические свойства этих зависимостей, позволяющие оптимизировать конструкцию.

Ключевые слова: ферма; прогиб; упрочнение; метод индукции; точное решение; Maple

Введение

Если прочность балочной фермы является абсолютным требованием к ее конструкции, то параметры необходимой жесткости зависят от назначения фермы. Так, например, жесткость фермы, предназначенной для мостов с рельсовым транспортом, должна быть существенно больше, чем для пешеходных мостов или кровельных покрытий [1, 2]. Одним из способов увеличения жесткости балочной фермы является введение дополнительного пояса [3]. В настоящей работе проводится аналитическое исследование влияния дополнительного пояса на деформации фермы. Методом индукции [4–6] находится решение, зависящее от геометрических параметров конструкции и числа панелей.

Ферма состоит из $2n$ панелей и упрочняющей конструкции из $2n-1$ стоек, расположенных под нижним поясом, двух раскосов и $2n-2$ горизонтальных стержней. Упрочняющая конструкция делает ферму один раз статически неопределенной. Действительно, в такой ферме $m+3$ стержней, включая 3 опорных стержня, моделирующих шарнирные опоры, где $m=12n$, и $k=6n+1$ узлов, дающих $12n+2$ уравнений равновесия. Таким образом, число стержней $m+3=12n+3$ на один больше числа уравнений статики.

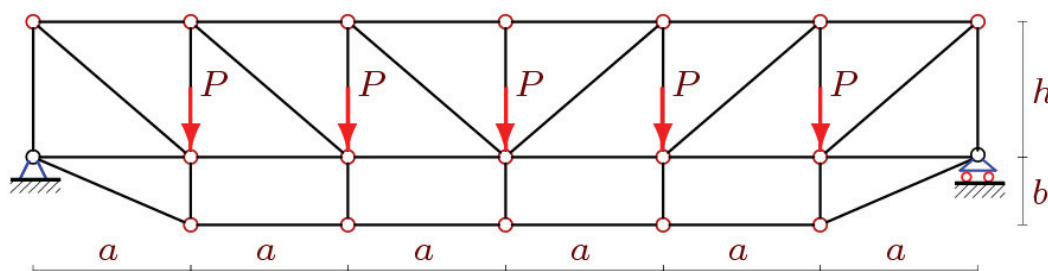


Рисунок 1. Ферма. $n=3$

Расчет

Статическую неопределенность раскрываем методом сил. В качестве основной системы примем ферму с одним удаленным стержнем из пояса упрочнения (рис. 2). Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов.

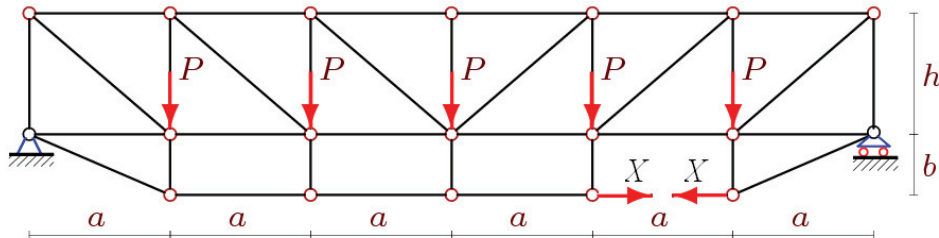


Рисунок 2. Основная система

Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой неподвижной шарнирной опоре, получим:

$$x_i = x_{i+2n+1} = (i-1)a, \quad y_i = 0, \quad y_{i+2n+1} = h, \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$x_{i+4n+2} = ia, \quad y_{i+4n+2} = -b, \quad i = 1, \dots, 2n-1.$$

Конфигурацию стержней решетки фермы представим условными векторами $\bar{V}_i, i = 1, \dots, m$, координатами которых являются номера шарниров по их концам. Отметим, что направления этих векторов просто определяют структуру соединений стержней в ферме и никак не связаны со знаками усилий в стержнях.

Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы: $\bar{V}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n$;

стержни верхнего пояса: $\bar{V}_{i+2n} = [i+1+2n, i+2+2n], i = 1, \dots, 2n$;

раскосы решетки: $\bar{V}_{i+4n} = [i+1, i+2n+1], \bar{V}_{i+5n} = [i+n, i+3n+2], i = 1, \dots, n$;

стойки решетки $\bar{V}_{i+6n} = [i, i+2n+1], i = 1, \dots, 2n+1$;

стойки упрочняющей конструкции: $\bar{V}_{i+8n+1} = [i+1, i+4n+2], i = 1, \dots, 2n-1$;

пояс упрочняющей конструкции: $\bar{V}_{i+10n} = [i+4n+2, i+4n+3], i = 1, \dots, 2n-3$;

боковые раскосы упрочняющей конструкции: $\bar{V}_{12n-2} = [1, 4n+3], \bar{V}_{12n-1} = [2n+1, 6n+1]$.

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения равновесия узлов фермы в проекциях на оси координат, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на эти оси:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где $m_0 = m + 3$ – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют неподвижную и подвижную опоры. Первый индекс в номере $V_{j,i}$ означает номер компоненты вектора \bar{V}_i , второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}.$$

Здесь \bar{S} – вектор неизвестных усилий, \bar{B} – вектор нагрузок длиной m_0 . Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные – в четные B_{2i} . Для ускорения счета решение находим с помощью обратной матрицы $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$. Этот метод хорошо реализуется в системе **Maple** [7] и не требует повторного решения системы при изменении нагрузки. В поставленной задаче таких нагрузок три: внешняя нагрузка от $2n-1$ вертикальных сил, единичные силы по направлению неизвестных X и единичная сила в середине пролета фермы для определения прогиба.

Введем обозначение для усилий в стержнях фермы. От внешней нагрузки – $S_{i,P}$, усилия от единичной нагрузки, вдоль неизвестных X – $S_{i,X}$, $i = 1, \dots, m$, усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, – s_i . Для упрощения решения учтем симметрию задачи и определим усилия в стержнях только в половине пролета.

Применим метод индукции. Последовательно решая в символьной форме поставленную задачу для ферм с 1, 2, 3 и т. д. панелями в половине пролета, определяем сначала последовательности целочисленных коэффициентов перед соответствующими выражениями, а затем и их общие члены при $i = 1, \dots, n$.

Для стержней нижнего пояса имеем:

$$S_{i,P} = P \frac{a(i-1)(2n-i+1)}{2h}, \quad s_i = -\frac{a(i-1)}{2h}, \quad S_{i,X} = -\frac{h+b}{h}, \quad S_{1,X} = -1;$$

в стержнях верхнего пояса:

$$S_{i+2n,P} = -P \frac{ai(2n-i)}{2h}, \quad s_{i+2n} = \frac{ai}{2h}, \quad S_{i+2n,X} = \frac{b}{h}.$$

Нисходящие раскосы:

$$S_{i+4n,P} = -P \frac{ci(2n-2i+1)}{2h}, \quad s_{i+4n} = -\frac{c}{2h}, \quad S_{i+4n,X} = 0, \quad S_{1+4n,X} = -\frac{bc}{ah};$$

стойки:

$$S_{i+6n,P} = -P \frac{i(2n-2i+1)}{2}, \quad s_{i+4n} = \frac{1}{2}, \quad S_{i+6n,X} = 0, \quad S_{1+6n,X} = \frac{b}{a}.$$

Усилия в упрочняющей конструкции. В стойках:

$$S_{i+8n+1,P} = s_{i+8n+1} = S_{i+8n+1,X} = 0, \quad S_{8n+2,X} = -\frac{b}{a}.$$

В двух боковых раскосах:

$$S_{12n-2,P} = Pd / a, \quad s_{12n-2} = S_{12n-2,X} = 0;$$

в горизонтальных стержнях ($i = 1, \dots, n-2$):

$$S_{i+10n,P} = s_{i+10n} = 0, \quad S_{i+10n,X} = 1.$$

Коэффициенты канонического уравнения метода сил $\delta_1 X + \Delta_p = 0$ определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_p = \sum_{k=1}^m \frac{S_{k,P} S_{k,X} l_k}{EF}, \quad \delta_1 = \sum_{k=1}^m \frac{S_{k,X}^2 l_k}{EF}.$$

Принимаем, что жесткости EF всех стержней одинаковые, опорные стержни недеформируемые. Из канонического уравнения находим неизвестное усилие

$$X = -\frac{\Delta_P}{\delta_1} = \frac{Pa(a^3(\Phi_n h + \Psi_n b) + (2n-1)(c^3 + h^3)b)}{2(a^3(2n-1)(h^2 + b^2) + 2(n-1)hba^3 + b^2(c^3 + h^3) + h^2(b^3 + d^3))}, \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $\Phi_n = n(n-1)(4n+1)/6$ и $\Psi_n = n(4n^2-1)/3$ – общие члены последовательностей 3, 13, 34, 70, 125, 203, 308, 444 и 10, 35, 84, 165, 286, 455, 680, 969, которые получены из решения одного и того же рекуррентного уравнения

$$\Phi_n = 4\Phi_{n-1} - 6\Phi_{n-2} + 4\Phi_{n-3} - \Phi_{n-4}$$

при разных начальных условиях. Однородное рекуррентное уравнение получено с помощью оператора **rgf_findrecur** из состава пакета **genfunc** системы компьютерной математики **Maple**. Решение уравнения дает оператор **rsolve**.

Усилия в стержнях статически неопределимой фермы находим по формуле

$$T_k = S_{k,P} + X S_{k,X}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Имея аналитические выражения усилий во всех стержнях статически неопределимой фермы, можно определить прогиб фермы как функцию ее размеров и числа панелей. Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m T_k s_k l_k = \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m (S_{k,P} + X S_{k,X}) s_k l_k = \frac{1}{EF} \sum_{k=1}^m S_{k,P} s_k l_k + X \sum_{k=1}^m S_{k,X} s_k l_k = \\ &= P \frac{A_n a^3 + n^2(c^3 + h^3)}{2h^2} + X \frac{2b(n^2 a^3 + c^3 + h^3) + a^3 h n(n-1)}{2ah^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициент $A_n = n^2(1 + 5n^2)/6$ есть общий член последовательности 1, 14, 69, 216, 525, 1086, 2009, 3424, 5481, 8350..., удовлетворяющий рекуррентному уравнению

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Отметим нестандартный для подобных задач способ получения второго слагаемого в выражении (2). Прямой способ – метод обобщения результата с применением операторов пакета **genfunc** – дает при последовательном вычислении прогиба в окончательном виде весьма громоздкие на каждом этапе выражения с большим числом слагаемых, за коэффициентами которых уследить трудно. Значительно проще оказался метод суммирования найденных усилий, функционально зависящих от числа панелей n и размеров фермы, с помощью оператора суммирования **sum**. Кроме того, легко заметить, что первое слагаемое в (2) – это прогиб статически определимой фермы без упрочняющей конструкции внизу фермы (рис. 3). Аналогичная задача для статически определимых ферм с нагрузкой в середине пролета решена (также в символьном виде) в [8, 9].

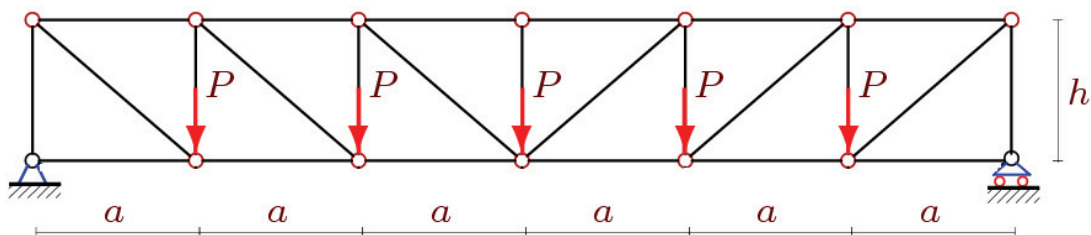


Рисунок 3. Статически определимая ферма, $n = 3$ (базовая схема)

Анализ решения

Ценность аналитических решений не только в их простоте, точности и в возможности использования решений в качестве тестовых при отладке сложных численных методов и пакетов, учитывающих многочисленные параметры фермы [10–16]. Аналитическое представление решения позволяет провести его анализ, в том числе и предельный анализ. В частности, значение неизвестной X метода сил (фактически, усилие в горизонтальных стержнях дополнительного пояса) при увеличении числа панелей и фиксированной длине пролета $L = 2an$ имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X = \frac{PLh}{b(b+h)}.$$

В этих же условиях (длина пролета фиксирована) имеем еще один предел:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} X = \frac{PL(2n-1)}{2bn}.$$

Зависимость усилия $X(b)$ от высоты нижнего (дополнительного) пояса b обнаруживает максимум (рис. 4). Аналитическое выражение этой величины в компактной форме найти не удается, но другая характерная точка этого графика при $b=0$ имеет простой вид:

$$X(0) = \frac{PL(4n+1)(n-1)}{24hn}.$$

На рисунке 5 даны графики зависимости (2) относительного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$ от числа панелей, а на рисунке 6 – графики зависимости прогиба от высоты фермы h . Имеется асимптота при $h \rightarrow \infty$.

$$\tilde{\Delta} = Kh + C, \quad K = (n-1)^2, \quad C = (2n-1)(n^3b^2(b+d) + L^2(nd + L(2n-1))) / (2n^3b^2).$$

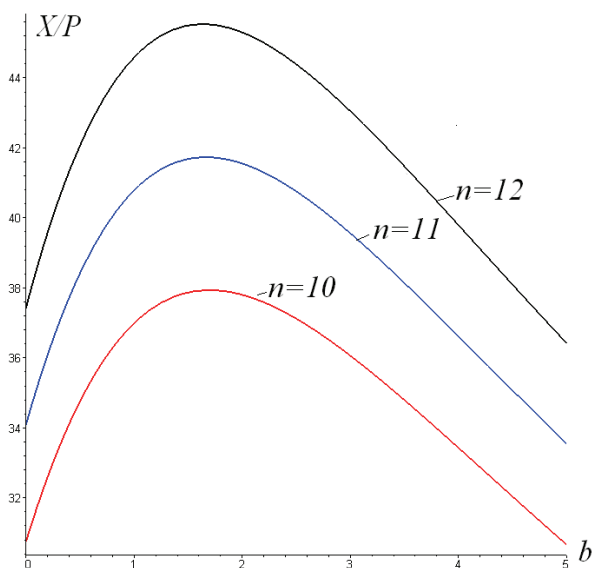


Рисунок 4. Зависимость усилия $X(b)$ от высоты нижнего пояса
 $L = 2an = 80 \text{ м}, h = 4 \text{ м}$

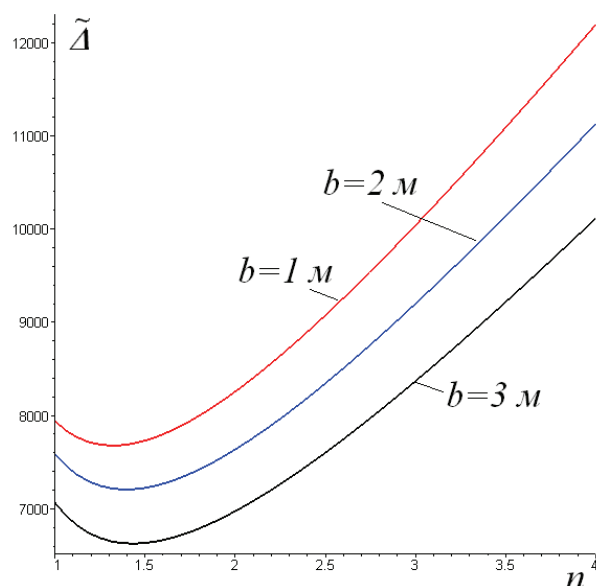


Рисунок 5. Зависимость прогиба от высоты фермы, $L = 2an = 80 \text{ м}, h = 8 \text{ м}$

Для сравнения прогиба фермы с введенными упрочняющими элементами и базовой фермы (статически определимой) на рисунке 7 приведены соответствующие кривые. С увеличением высоты фермы упрочняющее влияние дополнительных элементов падает.

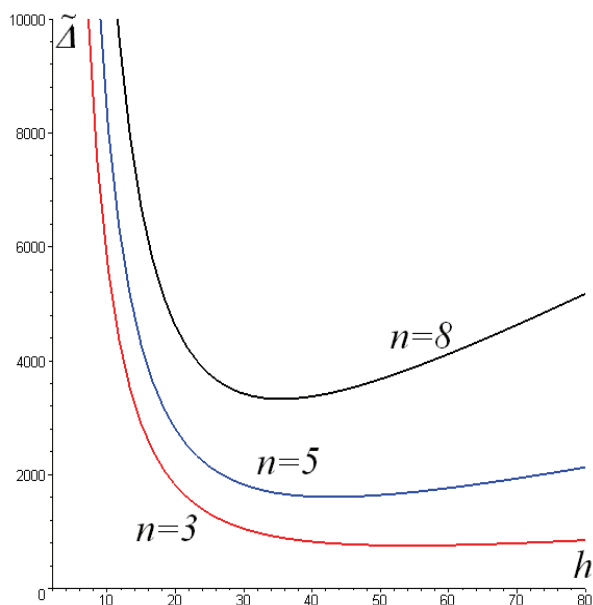


Рисунок 6. Зависимость прогиба от высоты фермы $L = 80\text{ м}$, $b = 8\text{ м}$

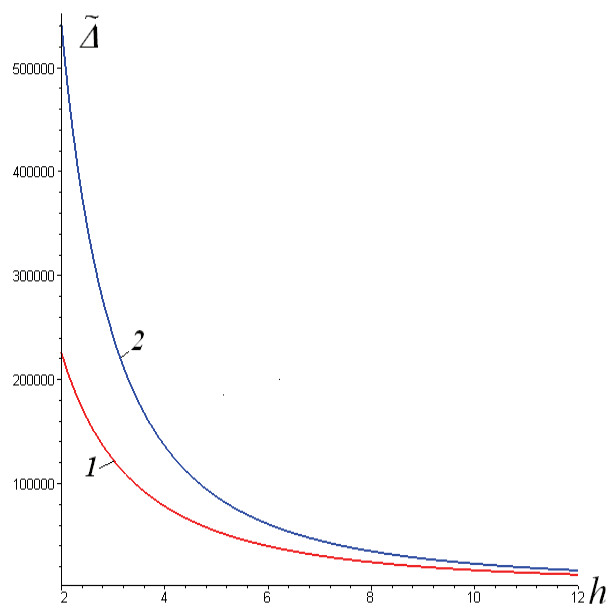


Рисунок 7. 1 – ферма с дополнительным поясом, $L = 80\text{ м}$, $b = 2\text{ м}$, $n = 10$, 2 – базовая схема $L = 80\text{ м}$, $n = 10$

Выводы

Приведенное решение показало, прежде всего, возможность получения достаточно простого замкнутого аналитического решения для задачи о прогибе статически неопределимой фермы нестандартной конфигурации и с большим числом стержней. Выбранная нагрузка (равномерная по нижнему поясу) моделирует в какой-то степени реальные нагрузки на ферму, встречающиеся в инженерной практике. По сравнению с уже известными решениями для ферм (плоских и пространственных) в этой задаче применен иной метод получения коэффициентов в формуле для прогиба.

Связано это с двумя этапами решения, обязательными для статически неопределимых систем: сначала надо раскрыть статическую неопределимость, применяя метод индукции, затем, имея громоздкую формулу для неизвестной X метода сил, попытаться (также аналитически) найти прогиб. Именно на втором этапе лучше применить метод суммирования выражений, входящих в формулу Максвелла – Мора. Метод же индукции здесь весьма трудоемок. Число последовательностей различного вида коэффициентов значительно, решение становится труднообозримым.

Отметим также, что в данной задаче содержатся три параметра, характеризующих размеры фермы и число панелей. Для оптимального выбора их набора во избежание простого перебора можно применить генетические алгоритмы [17–19] и алгоритмы, аналогичные муравьиным [20].

Литература

1. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 136–143.
2. Овсянников М.Ю., Кузнецова С.Г. Определение расчетного положения подвижной нагрузки фермы железнодорожного моста // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2013. №2. С. 62–67.
3. Воробьев А.В., Фаизов И.Н. Проектирование усиления раскосной фермы // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2012. №1. С. 162–168.
4. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.

5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32–38.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2–6.
7. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
8. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов, 2014. С. 34–36.
9. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. Часть 7. Тамбов, 2014. С. 21–22.
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782.
11. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
12. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.
13. Kaveh A, Shahrrouzi M., Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Pp. 2508–2524.
14. Казусь А.К., Степаненко А.Н. Исследование влияния величины расцентровки узлов на усилия в элементах фермы типа «Хабаровск» // Ученые заметки ТОГУ. 2013. Т. 4. №2. С. 30–35.
15. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search // Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No 2. Pp. 183–199.
16. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
17. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA // Procedia Technology Vol. 12. 2014. Pp. 339–346.
18. Optimal structural design family by genetic search and ant colony approach // Engineering Computations. 2008. Vol. 25. Issue 3. Pp. 268–288.
19. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60–63.
20. Sonmez M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures // Applied Soft Computing. 2011. Vol. 11. Pp. 2406–2418.

Михаил Николаевич Кирсанов, г. Москва, Россия
Тел. раб.: +7(495)3627314; эл. почта: mpei2004@yandex.ru

© Кирсанов М.Н., 2015

doi: 10.5862/MCE.56.5

Mathematical model of the truss with hardening elements

M.N. Kirsanov,*National Research University "Moscow Power Engineering Institute"*

+7(495)3627314; e-mail: mpei2004@yandex.ru

Key words

truss; statically indeterminate system; exact solution; Maple; deflection

Abstract

In the system of computer mathematics Maple the analytic expression for the deflection of the truss with the added belt stiffness was obtained by the method of induction.

There was selected a flat beam model of a truss with uniform vertical loads along the lower belt. Stiffness of the rods was accepted equal. Hardening elements represent horizontal rods and the rack which form the additional belt at the bottom of the truss. Forces in the rods were determined in an analytical form by the method of cutting nodes. The statically indeterminate system, resulting from the introduction of hardening elements, was revealed by the method of forces. Coefficients of canonical equations and the deflection of the mid-span in the lower belt were calculated by Maxwell-Mohr formula.

The article presents graphs of the dependence of deflection on dimensions of the truss and a number of panels. The asymptotic properties of these dependencies allow optimizing the construction.

References

1. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge. *Procedia Engineering*, Vol. 57. 2013. Pp. 136–143.
2. Ovsyannikov M.Yu., Kuznetsova S.G. Opredeleniye raschetnogo polozheniya podvizhnoy nagruzki fermy zheleznodorozhnogo mosta [The definition of the calculated position of the moving load farm railway bridge]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2013. No. 2. Pp. 62–67. (rus)
3. Vorobyev A.V., Faizov I.N. Proyektirovaniye usileniya raskosnoy fermy [Designing the diagonal truss reinforcement]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2012. No. 1. Pp. 162–168.(rus)
4. Kirsanov M.N. Izgib, krucheniye i asimptoticheskiy analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konsoli [Bending, torsion and asymptotic analysis of the cantilever bar]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No.5(49). Pp. 37–43. (rus)
5. Kirsanov M.N. Analiz progiba fermy pryamougol'nogo prostranstvennogo pokrytiya [Deflection analysis of rectangular spatial coverage truss]. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No.1(53). Pp. 32–38. (rus)
6. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet mnogoreschetchatoy fermy [Analytical calculation of the multilattice truss]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No.6. Pp. 2–6. (rus)
7. Kirsanov M.N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple, and Maplet. Solving mechanics problems]. Saint-Petersburg: Lan, 2012. 512 p. (rus)
8. Zhaketov D.D., Yatskov V.B. Progib ploskoy balochnoy fermy s treugolnoy reshetkoy [The deflection of the flat girder beam with a triangular lattice]. *Nauka i obrazovaniye v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31.10.14. Chast 7*. Tambov. 2014. Pp. 34–36. (rus)
9. Badertdinov R.R. Formula dlya progiba ploskoy balochnoy fermy [The formula for the deflection of the flat girder]. *Aktualnyye voprosy obrazovaniya i nauki: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30.9.14. Chast 7*. Tambov. 2014. Pp. 21–22.(rus)
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
12. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints. *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.

13. Kaveh A., Shahrouzi M. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. Pp. 2508–2524.
14. Kazus AK., Stepanenko A. N. Issledovaniye vliyaniya velichiny rastsentrovki uzlov na usiliya v elementakh fermy tipa «Khabarovsk» [Study of the influence of the magnitude of misalignment of the nodes on the efforts of the elements of the truss type "Khabarovsk"] *Uchenyye zametki TOGU*. 2013. Vol. 4. No. 2. Pp. 030–035. (rus)
15. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search. *Structural Engineering and Mechanic*. 2013. Vol. 45. No 2. Pp. 183–199.
16. Heyman J. Design of a simple steel truss. / *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
17. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA. *Procedia Technology*. 2014. Vol. 12. Pp. 339–346.
18. Optimal structural design family by genetic search and ant colony approach. *Engineering Computation*. 2008. Vol. 25. No. 3. Pp 268–288.
19. Kirsanov M.N. Geneticheskiy algoritm optimizatsii sterzhnevykh sistem [Genetic algorithm optimization of core systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2010. No. 2. Pp. 60–63. (rus)
20. Sonmez M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures. *Applied Soft Computing*. 2011. Vol. 11. Pp. 2406–2418.

Full text of this article in Russian: pp. 38–44