

## Численное исследование гиперупругих материалов

*К.ф.-м.н., доцент Л.У. Султанов;  
аспирант Л.Р. Фахрутдинов,*

*ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается методика исследования гиперупругих тел, используемых для определения больших деформаций нелинейных упругих материалов (различных полимеров, в том числе эластомеров, пены) с использованием меры деформации Фингера.

Дается кинематика движения среды, напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши – Эйлера. Большое внимание уделено алгоритму получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера для материала, описываемого потенциалом Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода.

Для проверки работоспособности методики решен ряд задач: задача о плоской деформации квадратной полосы и задача об упругом деформировании плиты под действием равномерного давления. Полученные в ходе решения результаты не противоречат данным, опубликованным ранее.

**Ключевые слова:** гиперупругие материалы; большие деформации; метод конечных элементов

### *Введение*

В современном строительстве, наряду с традиционными стройматериалами, широко применяются новые, более технологичные типы материалов. К ним относят различные эластомеры и другие подобные полимеры, отличительной особенностью которых является то, что они допускают большие деформации, сохраняя при этом упругие свойства. Подобные материалы также называются гиперупругими. С точки зрения механики деформируемого твердого тела речь идет о нелинейно упругих телах, при деформировании которых необходимо учитывать геометрическую нелинейность в рамках больших деформаций. Подобного рода проблемы рассматриваются во многих статьях и обобщены в ряде монографий, среди которых можно выделить работы [1–9]. В них приводится обширная библиография по данному вопросу и изложены основные положения по построению определяющих соотношений, и в данной статье этот материал активно используется. Из числа журнальных публикаций можно отметить статьи [10–17], которые посвящены гиперупругим и термогиперупругим материалам, в которых также рассматриваются различные варианты построения определяющих соотношений для конкретных материалов и приводятся примеры решения задач. Методика, описанная в этой статье, в идейном плане близка к методам, использованным в работах [18, 19]. Соотношения приводятся в наиболее компактной форме прямого тензорного исчисления. Подробнее о методах и технологии работы с использованием такой формы записи можно ознакомиться в работах [1, 3, 6].

В настоящей работе рассмотрена методика исследования гиперупругих тел с использованием меры деформации Фингера. Приведена кинематика движения среды. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши – Эйлера для материала, описываемого потенциалом Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода. Также решены некоторые задачи для проверки работоспособности методики.

## Кинематика среды

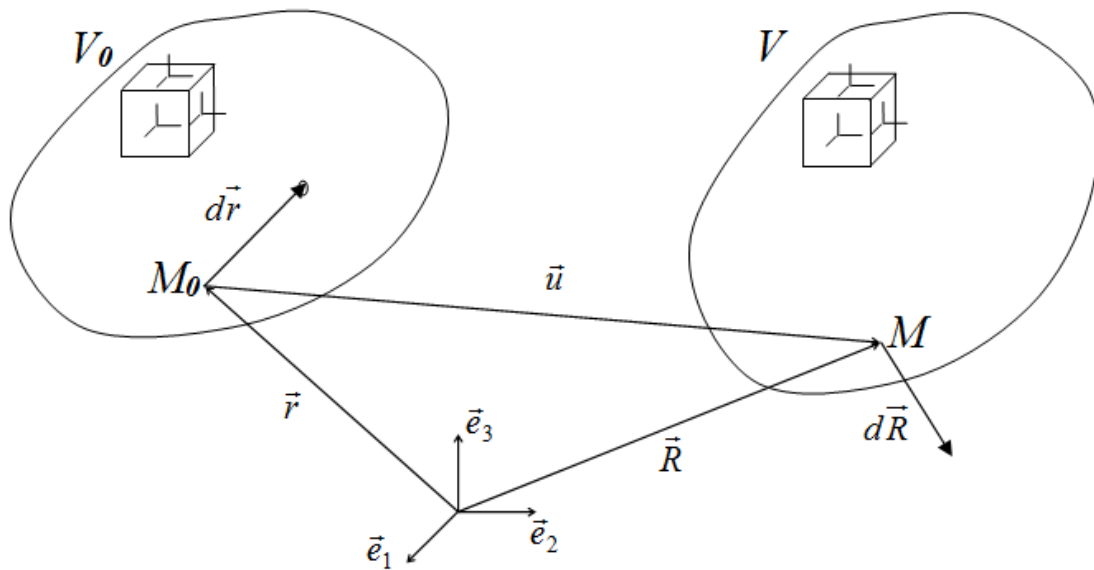


Рисунок 1. Кинематика среды

В глобальной неподвижной системе координат с ортами  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  положение исследуемого деформируемого тела описывается с помощью:

- $\bar{r}(\xi^j) = x^i(\xi^j)\bar{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в недеформированном состоянии;
- $\bar{R}(\xi^j) = y^i(\xi^j)\bar{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в деформированном состоянии;
- $\bar{u}(\xi^j) = \bar{R}(\xi^j) - \bar{r}(\xi^j) = u^i(\xi^j)\bar{e}_i$  – вектор перемещения;
- $\bar{v}(\xi^j) = \dot{\bar{R}}(\xi^j) = \dot{y}^i(\xi^j)\bar{e}_i = v^i(\xi^j)\bar{e}_i$  – вектор скорости.

Базовым тензором, играющим ключевую роль в кинематике конечных деформаций, является тензор градиента деформаций:

$$(F) = (\bar{\nabla}_x \bar{R})^T = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} (\bar{e}_i \bar{e}_j).$$

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются:

- левый тензор Коши – Грина (мера деформации Фингера):  $(B) = (F) \cdot (F)^T$ ;
- тензор пространственного градиента скорости:  $(h) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1})$ ;
- тензор деформации скорости:

$$(d) = \frac{1}{2} [(h) + (h)^T] = \frac{1}{2} [(\dot{F}) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot (\dot{F})^T].$$

### Определяющие соотношения

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений  $(\Sigma) = \sigma_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j)$ , определенного в актуальном состоянии.

В качестве аргументов функции потенциальной энергии деформации примем компоненты тензора меры деформации Фингера, т. е. :

$$W = W(B_{ij}),$$

где вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема:

$$(\hat{B}) = J^{-2/3}(B)$$

Здесь  $J = dV/dV_0$  – относительное изменение объема.

Таким образом:

$$W = W_0(J) + W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}}).$$

Тогда тензор напряжений Коши – Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(F) \cdot (F)^T \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial B} \right) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial B} \right).$$

Скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$(\dot{\Sigma}) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где введено обозначение:

$$(\Lambda_{\Sigma}) = \frac{4}{J}(B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B).$$

В результате получаем физическое соотношение для производной Трусделла в виде линейного уравнения:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\dot{\Sigma}) - (h) \cdot (\Sigma) - (\Sigma) \cdot (h)^T + I_{1d}(\Sigma) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot (d).$$

Таким образом, для гиперупругого тела определяющие соотношения для скоростей имеют вид линейной зависимости при использовании обобщенной производной Трусделла для тензора истинных напряжений Коши – Эйлера и тензора деформации скорости.

### Алгоритм расчета

Для решения задачи используется метод последовательных нагружений. Считается, что известно  $k$ -е состояние, по которому нужно найти  $(k+1)$ -е состояние.

В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей, записанного для  $(k+1)$ -го шага:

$$\iiint_{V_{k+1}} ({}^{k+1}\Sigma) \cdot (\delta {}^{k+1}d) dV = \iiint_{V_{k+1}} {}^{k+1}\vec{f} \cdot \delta \vec{v} dV + \iint_{S_{k+1}^{\sigma}} {}^{k+1}\vec{t}_n \cdot \delta \vec{v} dS,$$

где  $V_{k+1}$  – текущий объем;  $S_{k+1}^{\sigma}$  – часть его поверхности, на которой заданы усилия;

$\vec{f}$ ,  $\vec{t}_n$  – векторы массовых и поверхностных сил.

Переходя к приращениям

$$\left( {}^{k+1}\Sigma \right) = \left( {}^k\Sigma \right) + \left( \Delta {}^k\Sigma \right),$$

получим разрешающее уравнение, решение которого дает вектор перемещений для текущего шага  $\Delta {}^k\vec{u} = \Delta {}^k x_i \vec{e}_i$ , с помощью которого определяется конфигурация следующего шага:  ${}^{k+1}\vec{R} = {}^k\vec{R} + \Delta\vec{u}$ .

Тогда напряженное состояние находится по соотношению:  $\left( {}^{k+1}\Sigma \right) = \frac{2}{J} \left( {}^{k+1}B \right) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial {}^{k+1}B} \right)$ .

Рассмотрен пример построения физических соотношений для потенциала упругих деформаций Муни – Ривлина:

$$W = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3) + \frac{K}{2}(J - 1)^2,$$

где  $W_0(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2$ ,  $W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}}) = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3)$ ,  $U_1, U_2$  – постоянные материала.

Тензор напряжений Коши – Эйлера для этого материала имеет вид:

$$\left( \Sigma \right) = 2U_1 J^{-\frac{5}{3}} \left[ (B) - \frac{1}{3} I_{1B} (I) \right] + 2U_2 J^{-\frac{7}{3}} \left[ I_{1B} (B) - \frac{1}{3} I_{1B}^2 (I) - \frac{2}{3} (B^2) \right] + K (J - 1) (I)$$

Линеаризуя полученное соотношение, получим выражение для скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$\left( \Delta \Sigma \right) = \left( \Lambda_\Sigma \right) \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где

$$\left( \Lambda_\Sigma \right) = \left( \Lambda_{\Sigma'} \right) + \left( \Lambda_{\sigma_0} \right), \quad \Lambda_{\Sigma'} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial B \partial B} \right), \quad \Lambda_{\sigma_0} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial B \partial B} \right).$$

Таким образом, получена система уравнений для определения напряженного состояния, которая может быть дискретизирована методом конечных элементов для получения численных решений.

### Численный пример

Для проверки работоспособности методики был решен ряд задач. Рассмотрим некоторые из них.

1. Задача о плоской деформации квадратной полосы со сторонами  $0.02 \times 0.02$  м<sup>2</sup>,  $U_1 = 0.36$  МПа,  $U_2 = 0.22$  МПа,  $K = 2000$  МПа. По вертикальным краям полосы заданы перемещения. Так как полоса имеет две оси симметрии, то была рассмотрена четверть полосы с заданием соответствующих условий симметрии [20].

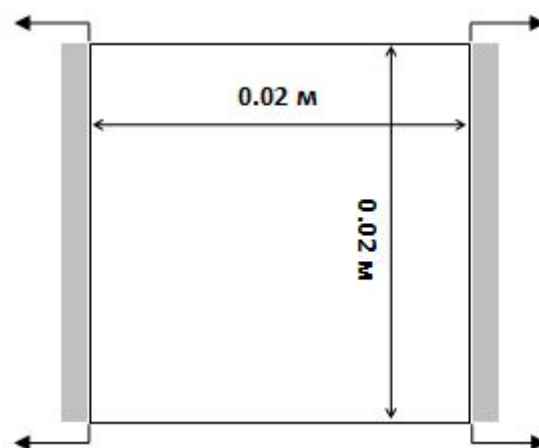


Рисунок 2. Плоское деформирование квадратной полосы

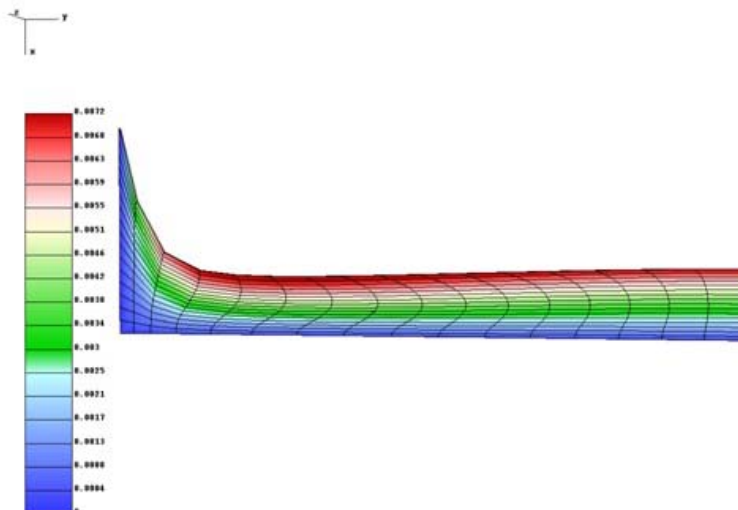


Рисунок 3. Поле вертикальных перемещений полосы

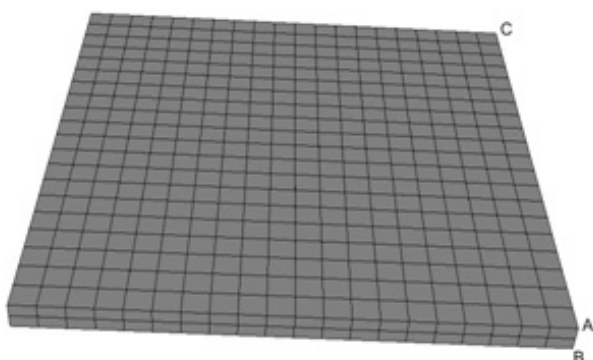


Рисунок 4. Конечно-элементная модель плиты

2. Задача об упругом деформировании плиты под действием равномерного давления  $q = 85 \text{ МПа}$ . Верхнее ребро плиты не имеет вертикального смещения. Плита квадратная со стороной  $a = 0.02 \text{ м}$  и толщиной  $h = 0.01 \text{ м}$ ,  $K = 2000 \text{ ГПа}$ . На рисунке 4 изображено недеформированное состояние плиты.

На рисунках 5, 6 изображено поле вертикальных перемещений и поле касательных напряжений.

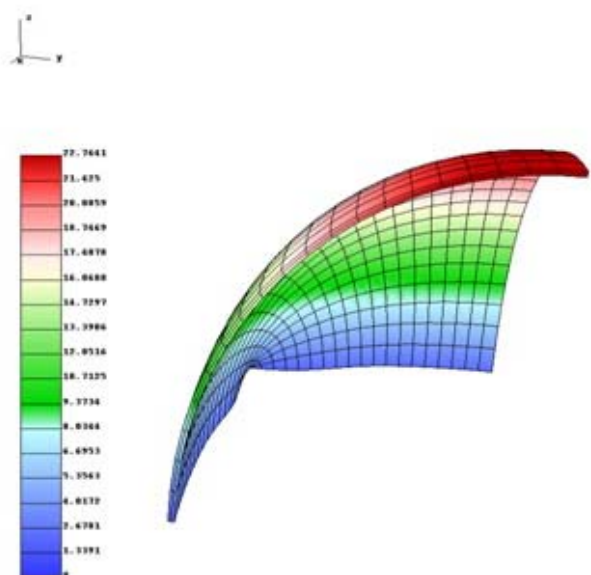


Рисунок 5. Поле вертикальных перемещений плиты

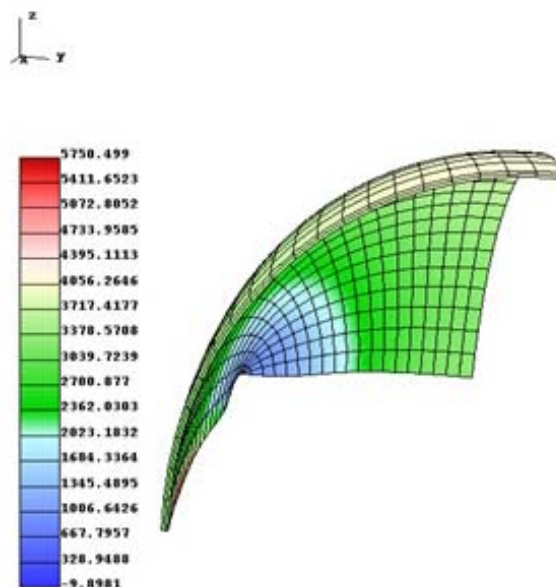


Рисунок 6. Поле касательных напряжений плиты

### Заключение

Таким образом, была построена методика численного исследования гиперупругих слабосжимаемых материалов, для которых физические соотношения задаются с помощью

упругого потенциала. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение для потенциала Муни – Ривлина. Данная методика после конечно-элементной дискретизации может быть использована для определения НДС, что видно из рассмотренных примеров. Решенные задачи демонстрируют эффективность полученной методики.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №12-01-00955, №12-01-97026, №12-01-31212, №13-01-97059, №13-01-97058.*

### Литература

1. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: КГУ, 2009. 465 с.
2. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
5. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
6. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
7. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.
9. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб: СПбГТУ, 1999. 341 с.
10. Конюхов А.В., Коноплев Ю.Г. Модель термогиперупругости и ее применение к исследованию потери устойчивости раздуваемых пластин. I // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. №3. С. 12–16.
11. Чернышов А.Д. Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. №1. С. 75–81.
12. Simo J.S., Pister K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1984. Vol. 46. Issue 2. Pp. 201–215.
13. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 49. Issue 2. Pp. 221–245.
14. Панов А.Д. Теория определяющих соотношений при деформировании изотропного твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №6. С. 27–44.
15. Vujosevic L., Lubarda V.A. Finite strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theoretical and applied mechanics. 2002. Vol. 28–29. Pp. 379–399.
16. Liu C.H., Wong J.Y., Mang H.A. Large strain finite element analysis of sand: model, algorithm and application to numerical simulation of tire-sand interaction // Computers & Structures. 2000. Vol. 74. Issue 3. Pp. 253–265.
17. Maniatty A.M., Liu Y., Klaas O., Shephard M. Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite deformation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2002. Vol. 191. Issues 13–14. Pp. 1491–1503.
18. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Султанов Л.У. Численное моделирование больших деформаций неупругих трехмерных тел // Научные технологии. 2004. №4(5). С. 52–60.
19. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. 2005. №6(41). С. 36–43.
20. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

*Ленар Усманович Султанов, г. Казань, Россия  
Тел. раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ls561@mail.ru*

*Ленар Рустамович Фахрутдинов, г. Казань, Россия  
Тел. раб.: +7(843)231-51-85; эл. почта: bishchumbek@gmail.com*

©Султанов Л.У., Фахрутдинов Л.Р., 2013

doi: 10.5862/MCE.44.9

## Numerical study of hyperelastic materials

**L.U. Sultanov,***Kazan (Volga region) federal university, Kazan, Russia  
+7(843)2337185; e-mail: ls561@mail.ru***L.R. Fakhrutdinov,***Kazan (Volga region) federal university, Kazan, Russia  
+7(843)2315185; e-mail: bishchumbek@gmail.com*

### Key words

hyperelastic materials; large deformations; finite-element method

### Abstract

In this paper, the research method of large deformations of hyperelastic solids using the Finger strain measure is considered.

The kinematics of continua motion is given; the stress state is described by the Cauchy – Euler tensor of the true stresses. Much attention is given to the algorithm of the linearized constitutive equations in terms of the Cauchy – Euler stresses. Also, there is an example of obtaining the linearized physical ratio in the Cauchy – Euler stresses for material, which is described by Mooney – Rivlin potential. The numerical implementation is based on a finite-element method within the framework of incremental methods.

To verify efficiency of the technique, several problems were solved: the problem of plane strain of the square strip and the problem of elastic deformation of the plate under uniform pressure. The results obtained do not contradict those that have been published before.

### References

1. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskiye modeli vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred* [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable continua]. Kazan: Kazan state university, 2009. 465 p. (rus)
2. Oden D. *Konechnye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite elements in nonlinear continuum mechanics]. Moscow: Mir, 1976. 464 p. (rus)
3. Chernykh K.F. *Nelineynaya teoriya uprugosti v mashynostroytelnykh raschetakh* [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]. Leningrad: Mashinostroyeniye, 1986. 336 p. (rus)
4. Vasidzu K. *Variatsionnyye metody v teorii upugosti i plastichnosti* [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Mir, 1987. 542 p. (rus)
5. Grin A., Adkins D. *Bolshiye uprugiyе deformatsii i nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy* [Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics]. Moscow: Mir, 1965. 455 p. (rus)
6. Korobeynikov S.N. *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* [Nonlinear deformations of solids]. Novosibirsk: Sibirskoye otdeleniye RAN, 2000. 262 p. (rus)
7. Trusdell K. *Pervonachalnyy kurs ratsionalnoy mekhaniki sploshnykh sred* [Initial course of rational continuum mechanics]. Moscow: Mir, 1975. 592 p. (rus)
8. Guz A.N. *Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruyemykh tel* [Basis of three-dimensional theory of stability of deformable solids]. Kiev: Vishcha shkola, 1986. 511 p. (rus)
9. Yeliseyev V.V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of elastic solids]. Saint-Petersburg: SPbGTU, 1999. 341 p. (rus)
10. Konyukhov A.V., Konoplev U.G. *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika*. 2006. No. 3. Pp. 12–16. (rus)
11. Chernyshov A.D. *Mechanics of Solids*. 1993. No. 1. Pp. 75–81. (rus)
12. Simo J.S., Pister K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1984. Vol. 46. Pp. 201–215.
13. Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 49. Issue 2. Pp. 221–245.
14. Panov A.D. *Mechanics of Solids*. 2004. No. 6. Pp. 27–44. (rus)

Sultanov L.U., Fakhrutdinov L.R. Numerical study of hyperelastic materials

15. Vujosevic L., Lubarda V.A. Finite strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // *Theoretical and applied mechanics*. 2002. Vol. 28–29. Pp. 379–399.
16. Liu C.H., Wong J.Y., Mang H.A. Large strain finite element analysis of sand: model, algorithm and application to numerical simulation of tire-sand interaction. *Computers & Structures*. 2000. Vol. 74. Pp. 253–265.
17. Maniatty A.M., Liu Y., Klaas O., Shephard M. Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. 2002. Vol. 191. Pp. 1491–1503.
18. Golovanov A.I., Konoplev U.G., Kuznetsov S.A., Sultanov L.U. *Science Intensive Technologies*. 2004. No. 4(5). Pp. 52–60. (rus)
19. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Applied Mechanics*. 2005. No. 6(41). Pp. 36–43. (rus)
20. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

**Full text of this article in English: pp. 69–74**