

Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов

*К.ф.-м.н., доцент Л.У. Султанов;
аспирант Р.Л. Давыдов,*

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Аннотация. В работе построена методика численного исследования упругопластических тел с учетом конечных деформаций. Определяющие соотношения получены с использованием упругого потенциала в рамках теории пластического течения. В качестве критерия пластичности применяется условие Губера – Мизеса с упрочнением. Используется процедура пошагового нагружения, где разрешающее вариационное уравнение получено из принципа виртуальных мощностей в текущей конфигурации.

При моделировании пластических деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния, основанного на введении в разрешающую систему уравнений мощности дополнительных напряжений. Численная дискретизация основана на методе конечных элементов.

Приводится решение тестовой задачи об упругопластическом растяжении стержня круглого поперечного сечения, результаты которого сравнены с результатами, полученными другими авторами.

Ключевые слова: большие деформации; нелинейная упругость; пластичность; метод конечных деформаций

При строительстве и эксплуатации конструкций, при взаимодействии конструкций между собой возникают нелинейные задачи. Решению нелинейных задач, в частности с учетом больших упругопластических деформаций, посвящено множество публикаций. Они отличаются постановкой задач, методикой разделения состояний на упругие и пластические и алгоритмами решений. Так как подобные задачи в большинстве своем имеют лишь численное решение, то большой популярностью пользуется метод конечных элементов [1–3] для дискретизации задачи в рамках шаговых методов, в которых неизвестные определяются либо относительно начального состояния [4, 5], либо относительно предыдущего состояния [6], либо решение ищется в актуальном состоянии [7–9]. В первом варианте кинематику описывает тензор деформаций Коши – Грина, напряженное состояние – второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа. Во втором случае используются модифицированный тензор приращения деформаций Коши – Грина и модифицированный тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа, с помощью которого определяется тензор истинных напряжений в текущем состоянии. Третий вариант – пошаговое интегрирование уравнений в актуальной конфигурации. При моделировании пластических деформаций [3, 10–13] существует два подхода: разделение скорости деформации на сумму упругой и пластической составляющих [5] и представление полного градиента деформаций в виде произведения неупругой и упругой составляющих [4, 6].

В настоящей работе приводится методика исследования конечных упругопластических деформаций, которая является продолжением работы [14]. В работе [14] исследуются идеально упругопластические материалы, в качестве упругого закона используется закон Гука в скоростях напряжений Яуманна. В представленной работе вводится удельная потенциальная энергия деформации, которая зависит от левого тензора Коши – Грина [7–9, 15–18]. Получены определяющие соотношения упругого деформирования для изотропного материала в виде зависимости производной Труделла тензора напряжений Коши – Эйлера от деформации скорости [2, 19, 20]. В рамках теории течения и ассоциированного закона течения используется аддитивное представление для полной деформации скорости [5, 10, 21]. Критерием упругого деформирования является условие Губера – Мизеса с изотропным упрочнением. Алгоритм расчета основан на методе последовательных нагружений, где разрешающая система уравнений получена путем линеаризации уравнения мощностей в актуальном состоянии. При моделировании пластических деформаций применяется метод проецирования напряжений на поверхность текучести [20, 22] с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния, основанным на введении в разрешающую систему уравнений мощности дополнительных напряжений. В качестве примера рассмотрено построение алгоритма решения

для материала второго порядка. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Используется 8-узловой конечный элемент. Созданный алгоритм исследования больших упругопластических деформаций апробирован на решении тестовой задачи о растяжении круглого стержня с образованием шейки.

1. Кинематика среды. Уравнение в скоростях напряжений

В настоящей работе используются основные положения и соотношения кинематики среды, которые приводятся в работах [7–9 и 14]. В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются тензор градиента деформации \mathbf{F} , мера деформации Фингера, тензор пространственного градиента скорости $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$, тензор деформации скорости $\mathbf{d} = \frac{1}{2}[\mathbf{h} + \mathbf{h}^T]$. Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений Σ , определенного в актуальном состоянии.

В качестве базового уравнения используется уравнение принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации:

$$\int_{\Omega} \Sigma \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^{\sigma}} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS, \quad (1.1)$$

где \vec{v} – вектор скорости материальной точки; Ω – текущий объем; S^{σ} – часть поверхности, на которой заданы усилия; \vec{f} , \vec{p} – векторы объемных и поверхностных сил соответственно.

После линеаризации (1.1) получим уравнение в скоростях напряжений Коши – Эйлера:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\dot{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{d} + \Sigma \cdot \delta \dot{\mathbf{d}} + \frac{J}{J} \Sigma \cdot \delta \mathbf{d} \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left[\dot{\vec{f}} + \vec{f} \frac{J}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_S \left[\dot{\vec{p}} + \vec{p} \frac{J}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} dS, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $J = \det(\mathbf{F})$ – относительное изменение объема.

2. Определяющие соотношения

Определяющие соотношения получим, используя потенциальную энергию упругой деформации, которую определяет функция W .

Для изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, функция удельной потенциальной энергии деформации запишется в виде:

$$W = W(I_{1B}, I_{2B}, I_{3B}),$$

тогда тензор напряжений можно выразить как

$$\Sigma = \frac{2}{J} \mathbf{B} \cdot \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_{1B}} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_{2B}} [I_{1B} \mathbf{I} - \mathbf{B}] + \frac{\partial W}{\partial I_{3B}} I_{3B} \mathbf{B}^{-1} \right\}.$$

Из последнего соотношения получим выражение для скорости напряжений Коши – Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = 2 \left\{ \frac{1}{J} \dot{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} + \frac{1}{J} \left[\mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{B}^2} \right] \cdot \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} I_{1d} \right\} = \\ = \Lambda_{\Sigma} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \mathbf{h}^T - \Sigma I_{1d}, \end{aligned}$$

где введено обозначение:

$$\Lambda_{\Sigma} = \frac{4}{J} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{B} \partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}.$$

В результате получаем физическое соотношение упругого деформирования в виде линейного уравнения:

$$\Sigma^{Tr} = \Lambda_{\Sigma} \cdot \mathbf{d},$$

где $\Sigma^{Tr} = \dot{\Sigma} + \mathbf{h} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \mathbf{h}^T - I_{1d} \Sigma$ – производная Труделла тензора напряжений Σ [2, 19].

Моделирование упругопластических деформаций основано на аддитивном представлении полной деформации скорости, т. е. $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, где \mathbf{d}^e – упругая составляющая, а \mathbf{d}^p – пластическая.

Предполагается справедливость ассоциированного закона течения:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma},$$

где $\dot{\lambda}$ – скорость пластических деформаций; Φ – функция текучести.

Рассмотрим в качестве критерия упругого деформирования условие Губера – Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде:

$$\Phi = \sigma_i - \sigma_T(\chi) \leq 0, \quad (2.1)$$

где $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma' \cdot \Sigma'}$ – интенсивность напряжений; $\sigma_T(\chi)$ – функция упрочнения; χ – параметр упрочнения.

Тогда, используя (2.1), пластическую деформацию скорости можно записать следующим образом:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \Sigma'} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\Sigma'}{\sigma_i}.$$

3. Метод проецирования напряжений на поверхность текучести

По известным параметрам k -го состояния определим $(k+1)$ -е по следующей формуле:

$${}^{k+1}\Sigma + \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_i} \Lambda \cdot \cdot {}^{k+1}\Sigma' = {}^{k+1}\tilde{\Sigma}. \quad (3.1)$$

Здесь

$${}^{k+1}\tilde{\Sigma} = {}^k\Sigma + \{ \Lambda \cdot \cdot {}^k\mathbf{d} + {}^k\mathbf{h} \cdot {}^k\Sigma + {}^k\Sigma \cdot {}^k\mathbf{h}^T - I_{1d} {}^k\Sigma \} \Delta t \quad (3.2)$$

– так называемый тензор «пробных» напряжений. Уравнение (3.1) определяет снос напряжений на поверхность текучести [19].

4. Общий алгоритм решения

Алгоритм решения основан на методе пошагового нагружения [9, 16], разрешающее уравнение на k -м шаге нагружения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k} \left\{ {}^k\mathbf{d} \cdot \cdot {}^k\Lambda \cdot \cdot \delta\mathbf{d} + \frac{1}{2} {}^k\Sigma \cdot \cdot \left[\delta\mathbf{h}^T \cdot {}^k\mathbf{h} + {}^k\mathbf{h}^T \cdot \delta\mathbf{h} \right] - [{}^k\bar{\nabla}_y \cdot {}^k\bar{\mathbf{v}}] \bar{f}^* \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} \right\} d\Omega + \\ & + \int_{S^\sigma} \left\{ {}^k\bar{t}_n^* \cdot {}^k\mathbf{h}^T - [{}^k\bar{\nabla}_y \cdot {}^k\bar{\mathbf{v}}] {}^k\bar{t}_n^* \right\} \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} dS = \int_{\Omega_k} {}^k\dot{f}^* \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} dV + \int_{S^\sigma} {}^k\dot{t}_n^* \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} dS - \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega_k} {}^k\Sigma \cdot \cdot \delta\mathbf{d} dV - \int_{\Omega_k} {}^k\bar{f}^* \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} dV - \int_{S^\sigma} {}^k\bar{t}_n^* \cdot \delta\bar{\mathbf{v}} dS \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решая уравнение (4.1), получим вектор скорости \vec{v} , который определяет конфигурацию на следующем шаге нагружения:

$${}^{k+1}\vec{R} = {}^k\vec{R} + {}^k\vec{v}\Delta t,$$

и напряженное состояние:

$${}^{k+1}\Sigma = {}^k\Sigma + {}^k\dot{\Sigma}\Delta t.$$

5. Численный пример

В качестве примера построены физические соотношения для следующего потенциала упругих деформаций:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8}(I_{1B} - 3)^2 + \mu(I_{1B} - 3) - \frac{\mu}{2}(I_{2B} - 3),$$

где λ, μ – параметры Ляме.

Получены линеаризованные определяющие соотношения. Численная реализация основана на методе конечных элементов. Используется 8-узловой конечный элемент [15, 17].

Упругопластическое растяжение круглого стержня. В качестве нагрузки на торцы стержня задается перемещение. Для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1,8%. Критерием пластичности служит условие Губера – Мизеса (2.1). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид: $\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi})$.

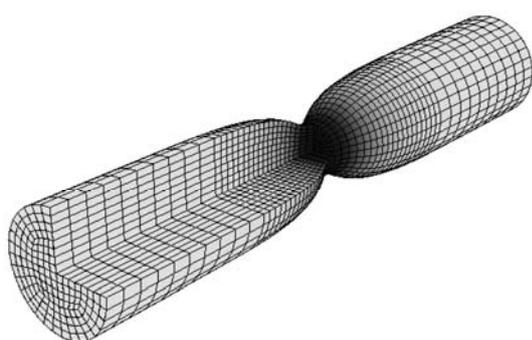


Рисунок 1. Интенсивность пластических деформаций для конечного положения

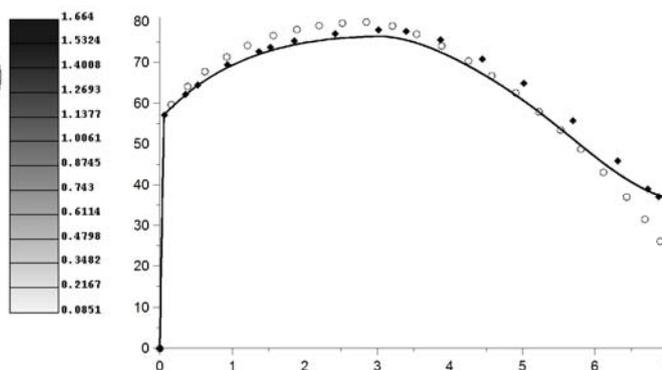


Рисунок 2. Диаграмма сила – перемещение (сплошная кривая – решение по описанной методике, \circ – решение из работы [4], \blacklozenge – решение из работы [5])

Заключение

В работе построена методика численного исследования конечных деформаций, работоспособность которой продемонстрирована на решении тестовой задачи. Отметим, что настоящая методика при соответствующем выборе упругого потенциала и критерия пластичности позволяет исследовать довольно широкий круг задач.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №12-01-00955, №12-01-97026, №12-01-31212, №13-01-97059, №13-01-97058

Литература

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир. 1984. 428 с.
2. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

3. Yamada Y., Yoshimura N., Sakura T. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method // International Journal of Mechanical Sciences. 1968. Vol. 10. No.2. Pp. 343–354.
4. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Computational Materials Science. 2003. Vol. 28. Issues 3–4. Pp. 732–742.
5. Schröder J., Gruttmann F. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Computational Mechanics. 2002. Vol. 30. Issue 1. Pp. 38–64.
6. Cheng J.H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 49. Issue 1. Pp. 71–108.
7. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2008. Т. 150. Кн. 1. С. 29–37.
8. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2008. Т. 150. Кн. 3. С. 122–132.
9. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2009. Т. 151. Кн. 3. С. 108–120.
10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
11. Поздеев А.А., Няши Ю.А., Трусов П.В. Остаточные напряжения: Теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
12. Berezhnoi D.V., Paimushin V.N. Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2011. Vol. 75. No.4. Pp. 447–462.
13. Neale K.W. A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity // International Journal of Solids and Structures. 1972. Vol. 8. No.7. Pp. 865–876.
14. Султанов Л.У. Исследование больших вязкоупругопластических деформаций в трехмерной постановке МКЭ : Дис. ... канд. физ.-мат. наук . Казань, 2005. 141 с.
15. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечноеэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2010. Т. 152. Кн. 4. С. 115–126.
16. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. 2005. №6(41). С. 36–43.
17. Голованов А. И., Султанов Л. У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. №4. С. 13–16.
18. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: КГУ, 2009. 465 с.
19. Gadala M.S., Wang J. Computational implementation of stress integration in FE analysis of elasto-plastic large deformation problems // Finite Elements in Analysis and Design. 2000. Vol. 35. Issue 4. Pp. 379–396.
20. Pinsky P.M., Ortiz M., Pister K.S. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983. Vol. 40. Issue 2. Pp. 137–158.
21. Gupta A.K., Mohraz B., Schnobrich W.C. Elasto-plastic analysis of three-dimensional structures using the isoparametric element // Nuclear Engineering and Design. 1972. Vol. 22. Issue 2. Pp. 305–317.
22. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительных методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.

*Ленар Усманович Султанов, г. Казань, Россия
Тел раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ls561@mail.ru*

*Руслан Лаврентьевич Давыдов, г. Казань, Россия
Тел. раб.: +7(843)233-71-85; эл. почта: ruslan.davydov@mail.ru*

© Султанов Л. У., Давыдов Р. Л., 2013

doi: 10.5862/MCE.44.8

Numerical analysis of large deformation by finite element method

L.U. Sultanov,*Kazan (Volga region) federal university, Kazan, Russia
+7(843)2337185; e-mail: ls561@mail.ru***R.L. Davydov,***Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia
+7(843)2337185; e-mail: ruslan.davydov@mail.ru*

Key words

large deformation; nonlinear elasticity; plasticity; finite deformation

Abstract

In this paper a method of numerical studies of elastic-plastic bodies with finite deformations is considered. Constitutive relations obtained using the elastic potential in the flow theory. For plasticity condition Huber – Mises hardening condition criterion is applied. Incremental loading procedure is used, where allowing the variation equation is derived from the principle of virtual powers in the current configuration.

For the simulation of plastic deformation the surface projection of the stress flow with iterative refinement of the current stress-strain state is applied, based on the introduction of a system of equations in resolving power of additional stresses. The numerical discretization is based on the finite element method.

A solution of the test problem of elastic-plastic strain give by a circular bar, the results are compared with data, received by other authors.

References

1. Gallager R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [Finite Element Analysis. Fundamentals]. Moscow: Mir, 1984. 428 p. (rus)
2. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York: Cambridge University Press, 1997. 283 p.
3. Yamada Y., Yoshimura N., Sakura T. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1968. Vol. 10. No.2. Pp. 343–354.
4. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation. *Computational Materials Science*. 2003. Vol. 28. Issues 3–4. Pp. 732–742.
5. Schröder J., Gruttmann F. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress–strain measures. *Computational Mechanics*. 2002. Vol. 30. Issue 1. Pp. 38–64.
6. Cheng J.H., Kikuchi N. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985. Vol. 49. Issue 1. Pp. 71–108.
7. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2008. Vol. 150. No. 1. Pp. 29–37. (rus) (rus)
8. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2008. Vol. 150. No. 3. Pp. 122–132. (rus)
9. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2009. Vol. 151. No. 3. Pp. 108–120. (rus)
10. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 400 p. (rus)
11. Pozdeyev A.A., Nyashii Yu.A. Trusov P.V. *Ostatochnyye napryazheniya: Teoriya i prilozheniya* [Residual stress: Theory and applications]. Moscow: Nauka, 1982. 112 p. (rus)
12. Berezhnoi D.V., Paimushin V.N. Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. Vol. 75. No. 4. Pp. 635–659.
13. Neale K.W. A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1972. Vol. 8. No. 7. Pp. 865–876.

Sultanov L.U., Davydov R.L. Numerical analysis of large deformation by finite element method

14. Sultanov L.U. *Issledovaniye bolshikh vyazkouprugoplasticheskikh deformatsiy v trekhmernoy postanovke MKE* [Investigation of large deformations in viscoelastoplastic three-dimensional formulation]. PhD dissertation. Kazan, 2005. 141 p. (rus)
15. Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2010. Vol. 152. No. 4. Pp. 115–126. (rus)
16. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41. No. 6. Pp. 36–43. (rus)
17. Golovanov A. I., Sultanov L.U. *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika*. 2008. No. 4. Pp. 13–16.
18. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskiye modeli vychislitelnoy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred* [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable continua]. Kazan: Kazan state university, 2009. 465 p. (rus)
19. Gadala M.S., Wang J., Computational implementation of stress integration in FE analysis of elasto-plastic large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2000. Vol. 35. Issue 4. Pp. 379–396.
20. Pinsky P.M., Ortiz M., Pister K.S. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1983. Vol. 40. Pp. 137–158.
21. Gupta A.K., Mohraz V., Schnobrich W.C. Elasto-plastic analysis of three-dimensional structures using the isoparametric element. *Nuclear Engineering and Design*. 1972. Vol. 22. Issue 2. Pp. 305–317.
22. Uilkins M.L. In: *Vychislitelnyye metody v gidrodinamike* [Hydrodynamics computational methods]. Moscow: Mir, 1967. Pp. 212–263. (rus)

Full text of this article in English: pp. 64–68